Adı Soyadı:

Numarası: Cevap Anahtarı B 05.04.2019

2018-2019 BAHAR YARIYILI ANALİZ II DERSİ 2.QUIZ SINAV SORULARI

1) Rolle teoreminden yararlanarak $5x^4-4x+1=0$ denkleminin $(0,1)$ aralığında en az bir kökü olup olmadığını gösteriniz.

2) Alanı 12000 $cm^2$ olan dikdörtgen bir malzemeden tabanı kare üstü açık bir kutu prizma yapılmak isteniyor. En büyük hacimli kutunun boyutları ne olmalıdır?

3) L' Hospital kuralını kullanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}=?\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}x-\frac{1}{x}\right)=?$

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Not : Süre 45 dakikadır. Başarılar… Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

(1)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, $(a,b)$ üzerinde türevlenebilir ve $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ o.ş. $\exists c\in(a,b)$ vardır.

Bu teoremi soruya eşleştirirsek $[a,b]=(0,1)$ ve kökü aranan $5x^4-4x+1$ fonksiyonu $f'(x)$ olur. O zaman

$f(x)=\int f'(x)\cdot dx = x^5-2x^2+x+d$ için $f(0)=f(1)$

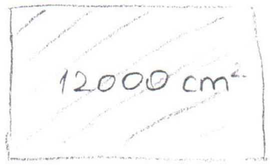
olup $f$, $[0,1)$-de sürekli & $(0,1)$-de türevlenebilirdir.

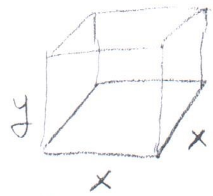
O zaman Rolle teoremi sağlar. Yani $5x^4-4x+1=0$ o.ş.

$\exists\, x\in(0,1)$ vardır.

2) 12000 $cm^2$ lik bir malzemeden tabanı kare üstü açık bir kutu yapılmak isteniyor. En büyük hacimli kutunun boyutları ne olur?

Çözüm:




Kutunun yüzey alanı : $4xy + x^2 = 12000$

$$y = \frac{12000 - x^2}{4x}$$

Kutunun hacmi : $V = x^2 \cdot y$

$$V(x) = x^2 \cdot \frac{12000 - x^2}{4x} = 3000x - \frac{x^3}{4}$$

$$V'(x) = 3000 - \frac{3x^2}{4}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = 3000 \Leftrightarrow x^2 = 4000$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 20\sqrt{10} \\ y &= 10\sqrt{10} \end{aligned}}$$

3) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} = ?$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right) = ?$

Çözüm: a) $0^0$, $y = (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{\ln x} \cdot \ln(\sin x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{3 \ln(\sin x)}{\ln x} = 3 \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 3 \lim_{x \to 0^+} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = e^{\lim_{x \to 0^+} \ln y} = e^3$$

b) $$\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0$$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \,, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$x=0$ düşey asimptot, $y=0$ yatay asimptot

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Eğik asimptot yok.

$$f'(x) = \frac{e^x\, x - e^x\, 1}{x^2} = \frac{e^x\,(x-1)}{x^2} \Rightarrow$$

positif

$x=1$ Kritik Nokta

| $x$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f'$ | $-$ | 0 | $+$ |

$f$, $(-\infty,1)$ de azalan, $(1,\infty)$ da artandır.

$x=1$ yerel min. nokta. $f(1)=e$

$$f''(x) = \frac{(e^x(x-1) + e^x\,1)\,.\,x^2 - e^x(x-1).\,2x}{x^4} = \frac{x.e^x\left(x(x-1) + x - 2x + 2\right)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x.\,(x^2 - x - x + 2)}{x^3} = \frac{e^x\,(x^2 - 2x + 2)}{x^3} = \frac{e^x\,((x-1)^2 + 1)}{x^3}$$

positif

$x=0$ Kritik Nokta

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $x^3$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ |

$f$, $(-\infty,0)$ da konkav, $(0,\infty)$ da konvekstir